Proposition: Für alle V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus

$$V^\vee \otimes_K W \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Hom}_K(V,W) \quad \text{mit} \quad \ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v)\cdot w).$$

Sein Bild ist der Unterraum aller Homomorphismen von endlichem Rang. Insbesondere ist er ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

Beweis: Ein Element von $V^\vee \otimes_K W$ hat die Form $\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i$ für gewisse $\ell_i \in V^\vee$, $w_i \in W$.

Sei $W' := \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \subset W$. $\Rightarrow \dim(W') < \infty$.

$\forall v \in V$: $\kappa\left(\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i\right)(v) = \sum_{i=1}^n \kappa(\ell_i \otimes w_i)(v) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\ell_i(v)}_{\in K} \cdot w_i \in W'$.

Also ist Bild $\subset W'$. $\Rightarrow$ Rang $< \infty$.

Umgekehrt sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ von endlichem Rang. Sei $W' := \mathrm{Bild}(f)$, $w_1, \ldots, w_n$ Basis von W'. Wähle $\ell_i \in V^\vee$ so dass $f = \kappa\left(\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i\right)$.

Das heißt: $\forall v \in V$: $f(v) = \sum_{i=1}^n \ell_i(v)\, w_i$. Sei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in W'^\vee$ die Dualbasis von $W'^\vee$ zu $w_1, \ldots, w_n$. Dann ist $\forall w' \in W'$: $w' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(w')\cdot w_i$.

Anwenden auf $w' = f(v) \in W'$ $\Rightarrow$ $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(v))\, w_i$ für alle $v \in V$.

Die $\ell_i := \lambda_i \circ f$ tun es. Also liegt f im Bild von κ.

qed.

Proposition: *(Adjunktionsformel)* Es existieren eindeutige Isomorphismen

$$\boxed{\mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2, W) \;\cong\; \mathrm{Mult}_K(V_1 \times V_2, W) \;\cong\; \mathrm{Hom}_K(V_1, \mathrm{Hom}_K(V_2, W))}$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & \Psi & \Psi \\ f & \varphi & \psi \end{array}$$

$f \longmapsto f \circ \kappa \qquad \varphi \longmapsto (v_1 \mapsto \varphi(v_1, \cdot))$

mit

$$f(v_1 \otimes v_2) \;=\; \varphi(v_1, v_2) \;=\; \psi(v_1)(v_2).$$

$\kappa: V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$

Bew.: Bijektiv wegen UE.

$(v_1, v_2) \mapsto \psi(v_1)(v_2) \longleftarrow\!\!| \; \psi$

beidseitige Inverse.

$f' \longleftrightarrow \varphi' \longleftrightarrow \psi'$

$f'(v_1 \otimes v_2) = \varphi'(v_1, v_2) = \psi'(v_1)(v_2)$.

$\Rightarrow \quad (\lambda f + f')(v_1 \otimes v_2) = (\lambda \varphi + \varphi')(v_1, v_2) = (\lambda \psi + \psi')(v_1)(v_2)$.

Also $\quad \lambda f + f' \longleftrightarrow \lambda \varphi + \varphi' \longleftrightarrow \lambda \psi + \psi'$.

qed.

Proposition: *(Funktorialität)* Zu linearen Abbildungen $f_i\colon V_i \to V_i'$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$f_1 \otimes f_2\colon V_1 \otimes_K V_2 \to V_1' \otimes_K V_2' \quad \text{mit} \quad v_1 \otimes v_2 \mapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2).$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d] & V_1' \times V_2' \arrow[r] & V_1' \otimes V_2' \\ V_1 \otimes V_2 \arrow[urr, bend right, "\exists \text{ eindeutige lin. Abb.}"'] \end{tikzcd}$$

$(v_1', v_2') \mapsto v_1' \otimes v_2'$ bilinear,

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$

$$\begin{tikzcd} (v_1, v_2) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \\ v_1 \otimes v_2 \arrow[ur, mapsto] \end{tikzcd}$$

Proposition: Für alle linearen Abbildungen $V_i \xrightarrow{f_i} V_i' \xrightarrow{g_i} V_i''$ gilt

(a) $\mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$.

(b) $f_1 \otimes 0_{V_2} = 0_{V_1} \otimes f_2 = 0_{V_1 \otimes V_2}$.

(c) $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$.

(d) Ist jeweils f_i ein Isomorphismus mit Inversem g_i, so ist $f_1 \otimes f_2$ ein Isomorphismus mit Inversem $g_1 \otimes g_2$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "f_1 \times f_2"] \arrow[d] & V_1' \times V_2' \arrow[r, "g_1 \times g_2"] \arrow[d] & V_1'' \times V_2'' \arrow[d] \\ V_1 \otimes V_2 \arrow[r, "f_1 \otimes f_2"'] & V_1' \otimes V_2' \arrow[r, "g_1 \otimes g_2"'] & V_1'' \otimes V_2'' \end{tikzcd}$$

qed

Bew.: (a) $f_1 = \mathrm{id}$, $f_2 = \mathrm{id}$ $\Rightarrow$ Die Identität $V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$ macht das Diagramm kommutativ.
$\Rightarrow f_1 \otimes f_2 = \mathrm{id}$.

(b) $(f_1 \otimes 0_{V_2})(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes 0_{V_2}(v_2) = f_1(v_1) \otimes 0 = 0 = 0_{V_1 \otimes V_2}(v_1 \otimes v_2)$
$\Rightarrow$ Für $f_2 = 0_{V_2}$ macht $0_{V_1 \otimes V_2}$ das Diagramm kommutativ $\Rightarrow f_1 \otimes 0_{V_2} = 0_{V_1 \otimes V_2}$.

(c) $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2)$ macht den äußeren Rand kommutativ. $\Rightarrow$ ist gleich $(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$.

(d) folgt aus (a), (c): $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2) = \mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$
$(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = \ldots\ldots = \mathrm{id}_{V_1' \otimes V_2'}$ qed

12.4 Körpererweiterung

Bsp.: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Sei K ein Unterkörper eines Körpers L, das heisst eine Teilmenge, welche mit den von L induzierten Rechenoperationen selbst einen Körper bildet. Dann ist jeder L-Vektorraum mit derselben Addition und der auf K eingeschränkten skalaren Multiplikation auch ein K-Vektorraum. Insbesondere wird L selbst zu einem K-Vektorraum.

$K^n \subset L^n$

Proposition: Für jeden K-Vektorraum V existiert genau eine Struktur als L-Vektorraum auf $V \otimes_K L$, deren additive Gruppe die von $V \otimes_K L$ ist und für die gilt:

a priori K-Vektorraum

$$\forall x, y \in L \ \forall v \in V : x \cdot (v \otimes y) = v \otimes xy.$$

Definition: Der L-Vektorraum $V_L := V \otimes_K L$ heisst die *Basiserweiterung von V bezüglich $K \subset L$.*

Bew.: Wollen für alle $x \in L$: $V \otimes_K L \to V \otimes_K L$ mit $v \otimes y \mapsto v \otimes xy$.

$\mathrm{id}_V \otimes m_x$: für die lin. Abb. $m_x : L \to L,\ y \mapsto xy$.

Setze $x \cdot (v \otimes y) := (\mathrm{id}_V \otimes m_x)(v \otimes y)$.

Variiere x $\Rightarrow$ Abb. $L \times (V \otimes_K L) \longrightarrow V \otimes_K L$.

$x = 1 \Rightarrow m_x = \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{id}_V \otimes m_x = \mathrm{id}$. Daher gilt: $\forall w \in V \otimes_K L : 1 \cdot w = w$.

$x, x' \in \cancel{K}$ $\in L$ $\Rightarrow m_{xx'} = m_x \circ m_{x'} \Rightarrow \mathrm{id}_V \otimes m_{xx'} = (\mathrm{id}_V \otimes m_x) \circ (\mathrm{id}_V \otimes m_{x'}) \Rightarrow (xx')w = x(x'w)$

[illegible]

$m_{x+x'} = m_x + m_{x'} \Rightarrow (\mathrm{id}_V \otimes m_{x+x'})(v \otimes y) = v \otimes (m_{x+x'}(y)) =$

$= v \otimes ((x+x')y) = v \otimes (xy + x'y) = v \otimes xy + v \otimes x'y$

$= v \otimes m_x(y) + v \otimes m_{x'}(y)$

$= (\mathrm{id}_V \otimes m_x)(v \otimes y) + (\mathrm{id}_V \otimes m_{x'})(v \otimes y)$

$= ((\mathrm{id}_V \otimes m_x) + (\mathrm{id}_V \otimes m_{x'}))(v \otimes y)$.

Also $\mathrm{id}_V \otimes m_{x+x'} = \mathrm{id}_V \otimes m_x + \mathrm{id}_V \otimes m_{x'}$. $\Rightarrow (x+x')w = xw + x'w$

Rechtsdistributivität analog. $\Rightarrow$ L-Vektorraum.

Proposition: Für jede Basis B des K-Vektorraums V bilden die Elemente $b \otimes 1$ von V_L für alle $b \in B$ eine Basis B_L des L-Vektorraums V_L. Insbesondere gilt

$$\boxed{\dim_L(V_L) = \dim_K(V).}$$

Bew.: Sei C eine Basis von L über K

$\Rightarrow \{ b \otimes c \mid b \in B, c \in C \}$ Basis von $V \otimes_K L$ über K.

$\forall w \in V_L$: $\exists! \alpha_{bc} \in K$, fast alle 0, so dass $w = \sum_{b,c}' \alpha_{bc} \cdot b \otimes c = \sum_{b,c}' \alpha_{bc} \cdot c (b \otimes 1) = \sum_{b \in B}' \underbrace{\left(\sum_c' \alpha_{bc} c\right)}_{\beta_b \in L} \cdot (b \otimes 1) = \sum_{b \in B}' \beta_b \cdot (b \otimes 1)$

$\exists! \beta_b \in L$, fast alle 0, so dass $w = \sum_{b \in B}' \beta_b \cdot (b \otimes 1)$

qed

Beispiel: Für jedes $n \geqslant 0$ existiert ein natürlicher Isomorphismus von L-Vektorräumen

$$f: \quad K^n \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L^n \quad \text{mit} \quad v \otimes x \mapsto xv.$$

Bew.:

$$\begin{tikzcd} K^n \times L \arrow[r, "K\text{-bilinear}"] \arrow[d] & L^n \\ K^n \otimes L \arrow[ur, "\text{eindeutige } K\text{-lineare Abb.}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (v,x) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & xv \\ v \otimes x \arrow[ur, mapsto] \end{tikzcd}$$

$\forall x, y \in L$: $\forall v \in V$:

$x \cdot f(v \otimes y) = x \cdot (yv) = xyv$

$= f(v \otimes xy) = f(x \cdot (v \otimes y))$

$\Rightarrow f$ verträglich mit Multiplikation mit x

$\Rightarrow$ L-linear.

$e_1, \ldots, e_n$ Standardbasis von K^n über K

$\Rightarrow$ $e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1$ Basis von $K^n \otimes_K L$ über L

$\downarrow \qquad \downarrow$

$e_1, \ldots, e_n$ Basis von L^n über L.

qed.

Definition: Im Fall $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ heisst $V_{\mathbb{C}}$ die *Komplexifizierung* des reellen Vektorraums V.

Definition: Der *komplex Konjugierte* eines $\mathbb{C}$-Vektorraums $(W, +, \cdot\,, 0_W)$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum $(W, +, \bar{\cdot}\,, 0_W)$, bei dem die skalare Multiplikation $\cdot$ ersetzt wurde durch

$$\bar{\cdot} : \ \mathbb{C} \times W \to W, \ (z, w) \mapsto z \,\bar{\cdot}\, w := \bar{z} \cdot w.$$

So wie wir üblicherweise $(W, +, \cdot\,, 0_W)$ mit W abkürzen, schreiben wir für $(W, +, \bar{\cdot}\,, 0_W)$ nur kurz $\overline{W}$.

Beispiel: Für jeden $\mathbb{C}$-Unterraum $W \subset \mathbb{C}^n$ existiert ein natürlicher Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$f: \quad \overline{W} \xrightarrow{\sim} \{\overline{w} \mid w \in W\} \subset \mathbb{C}^n, \quad w \mapsto \overline{w}.$$

komponentenweise komplexe Konjugation.

$$f(z \,\bar{\cdot}\, w) = f(\bar{z} \cdot w) = \overline{(\bar{z} w)} = z \cdot \bar{w} = z \cdot f(w) \Rightarrow \mathbb{C}\text{-linear}.$$

Bsp.: $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$

$\bar{W} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle$

Bemerkung: Für jeden $\mathbb{C}$-Vektorraum W gilt $\overline{(\overline{W})} = W$.

Bemerkung: Jede Basis von W ist auch eine Basis von $\overline{W}$.