

Proposition: Für alle V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus

$$\underline{V^\vee \otimes_K W} \xrightarrow{\kappa} \underline{\text{Hom}_K(V, W)} \quad \text{mit} \quad \underline{\ell \otimes w \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot w)}.$$

Sein Bild ist der Unterraum aller Homomorphismen von endlichem Rang. Insbesondere ist er ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

Beweis: Ein Element von $\underline{V^\vee \otimes_K W}$ hat die Form $\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i$ für gewisse $\ell_i \in V^\vee$ $w_i \in W$.

Sei $W' := \langle w_1, \dots, w_n \rangle \subset W \Rightarrow \dim(W') < \infty$.

$$\forall v \in V: \kappa\left(\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i\right)(v) = \sum_{i=1}^n \kappa(\ell_i \otimes w_i)(v) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\ell_i(v)}_{\in K} \cdot w_i \in W'.$$

Also ist Bild $\subset W' \Rightarrow \text{Rang} < \infty$.

Umgekehrt sei $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ von endlichem Rang. Sei $W' := \text{Bild}(f)$,

w_1, \dots, w_n Basis von W' . Will $\ell_i \in V^\vee$ so dass $f = \kappa\left(\sum_{i=1}^n \ell_i \otimes w_i\right)$

Dann leistet: $\forall v \in V: f(v) = \sum_{i=1}^n \ell_i(v) w_i$. Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in W'^\vee$ die

Dualbasis von W'^\vee zu w_1, \dots, w_n . Dann ist $\forall w' \in W': w' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(w') \cdot w_i$.

Anwende auf $w' = f(v) \in W' \Rightarrow f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f(v)) w_i$ für alle $v \in V$.

Die $\ell_i := \lambda_i \circ f$ tun es. Also liegt f im Bild von κ .

qed.

Proposition: (*Adjunktionsformel*) Es existieren eindeutige Isomorphismen

$$\text{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2, W) \cong \text{Mult}_K(V_1 \times V_2, W) \cong \text{Hom}_K(V_1, \text{Hom}_K(V_2, W))$$

mit



$\kappa: V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$
 $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$

$f(v_1 \otimes v_2) = \varphi(v_1, v_2) = \psi(v_1)(v_2).$

Bew.: Bijektiv wegen U.E.

$(v_1, v_2) \mapsto \psi(v_1)(v_2) \leftarrow \psi$
 beidseitig linear.

$f' \longleftarrow \varphi' \longleftarrow \psi'$
 $f'(v_1 \otimes v_2) = \varphi'(v_1, v_2) = \psi'(v_1)(v_2).$

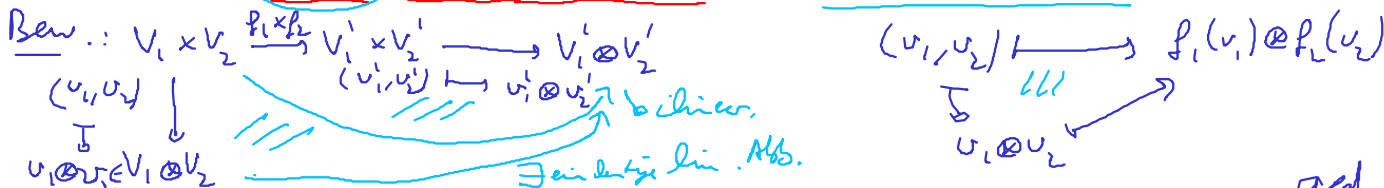
$\Rightarrow (\lambda f + f')(v_1 \otimes v_2) = (\lambda \varphi + \varphi')(v_1, v_2) = (\lambda \psi + \psi')(v_1)(v_2).$

Also $\lambda f + f' \longleftarrow \lambda \varphi + \varphi' \longleftarrow \lambda \psi + \psi'.$

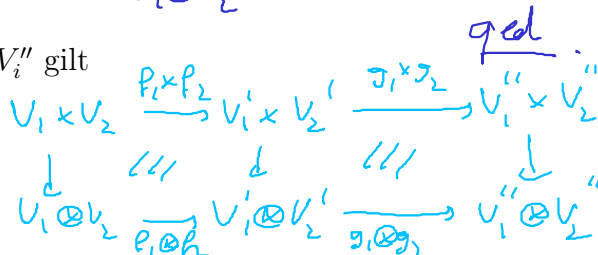
qed.

Proposition: (Funktorialität) Zu linearen Abbildungen $f_i: V_i \rightarrow V_i'$ existiert genau eine lineare Abbildung

$$f_1 \otimes f_2: V_1 \otimes_K V_2 \rightarrow V_1' \otimes_K V_2' \quad \text{mit} \quad v_1 \otimes v_2 \mapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2).$$



Proposition: Für alle linearen Abbildungen $V_i \xrightarrow{f_i} V_i' \xrightarrow{g_i} V_i''$ gilt



(a) $\text{id}_{V_1} \otimes \text{id}_{V_2} = \text{id}_{V_1 \otimes V_2}$.

(b) $f_1 \otimes 0_{V_2} = 0_{V_1} \otimes f_2 = 0_{V_1 \otimes V_2}$.

(c) $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$.

(d) Ist jeweils f_i ein Isomorphismus mit Inversem g_i , so ist $f_1 \otimes f_2$ ein Isomorphismus mit Inversem $g_1 \otimes g_2$.

Bew.: (a) $f_1 = \text{id}, f_2 = \text{id} \Rightarrow$ Die Identität $V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$ macht das Diagramm kommutativ.

$\Rightarrow f_1 \otimes f_2 = \text{id}$.

(b) $(f_1 \otimes 0_{V_2})(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes 0_{V_2}(v_2) = f_1(v_1) \otimes 0 = 0 = 0_{V_1 \otimes V_2}(v_1 \otimes v_2)$

\Rightarrow Für $f_2 = 0_{V_2}$ macht $0_{V_1 \otimes V_2}$ das Diagramm kommutativ $\Rightarrow f_1 \otimes 0_{V_2} = 0_{V_1 \otimes V_2}$.

(c) $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2)$ macht den äußeren Rand kommutativ. \Rightarrow ist gleich $(g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$.

(d) folgt aus (a) (c): $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2) = \text{id}_{V_1} \otimes \text{id}_{V_2} = \text{id}_{V_1 \otimes V_2}$

$(f_1 \otimes f_2) \circ (g_1 \otimes g_2) = \dots = \text{id}_{V_1' \otimes V_2'}$ qed

12.4 Körpererweiterung

$$\text{Bsp.} \cdot: \begin{array}{l} \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \end{array}$$

Sei K ein Unterkörper eines Körpers L , das heisst eine Teilmenge, welche mit den von L induzierten Rechenoperationen selbst einen Körper bildet. Dann ist jeder L -Vektorraum mit derselben Addition und der auf K eingeschränkten skalaren Multiplikation auch ein K -Vektorraum. Insbesondere wird L selbst zu einem K -Vektorraum.

$$K^n \subset L^n$$

Proposition: Für jeden K -Vektorraum V existiert genau eine Struktur als L -Vektorraum auf $V \otimes_K L$, deren additive Gruppe die von $V \otimes_K L$ ist und für die gilt:

a priori K -Vektorraum

$$\forall x, y \in L \forall v \in V: x \cdot (v \otimes y) = v \otimes xy.$$

Definition: Der L -Vektorraum $V_L := V \otimes_K L$ heisst die Basiserweiterung von V bezüglich $K \subset L$.

Bew.: Wollen: für alle $x \in L$: $V \otimes_K L \rightarrow V \otimes_K L$ mit $v \otimes y \mapsto v \otimes xy$.
 $id_V \otimes m_x$ für die lin. Abb. $m_x: L \rightarrow L, y \mapsto xy$.

Definiere $x \cdot (v \otimes y) := (id_V \otimes m_x)(v \otimes y)$.

Variieren $x \Rightarrow$ Abb. $L \times (V \otimes_K L) \rightarrow V \otimes_K L$.

$x=1 \Rightarrow m_x = id \Rightarrow id_V \otimes m_x = id$. Daher gilt: $\forall w \in V \otimes_K L: 1 \cdot w = w$.

$x, x' \in L \Rightarrow m_{xx'} = m_x \circ m_{x'} \Rightarrow id_V \otimes m_{xx'} = (id_V \otimes m_x) \circ (id_V \otimes m_{x'}) \Rightarrow (xx')w = x(x'w)$

Assoziativität

$$\begin{aligned} m_{x+x'} &= m_x + m_{x'} \Rightarrow (id_V \otimes m_{x+x'})(v \otimes y) = v \otimes (m_{x+x'}(y)) = \\ &= v \otimes ((x+x')y) = v \otimes (xy + x'y) = v \otimes xy + v \otimes x'y \\ &= v \otimes m_x(y) + v \otimes m_{x'}(y) \\ &= (id_V \otimes m_x)(v \otimes y) + (id_V \otimes m_{x'})(v \otimes y) \\ &= ((id_V \otimes m_x) + (id_V \otimes m_{x'}))(v \otimes y). \end{aligned}$$

Reicht die Assoziativität aus \Rightarrow L -Vektorraum. Also $id_V \otimes m_{x+x'} = id_V \otimes m_x + id_V \otimes m_{x'} \Rightarrow (x+x')w = xw + x'w$

Proposition: Für jede Basis B des K -Vektorraums V bilden die Elemente $b \otimes 1$ von V_L für alle $b \in B$ eine Basis B_L des L -Vektorraums V_L . Insbesondere gilt

$$\dim_L(V_L) = \dim_K(V).$$

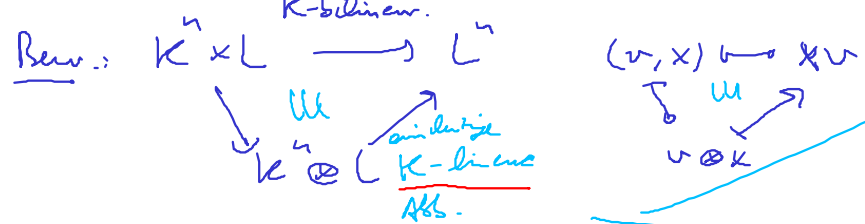
Bew.: Sei C eine Basis von L über K
 $\Rightarrow \{ b \otimes c \mid b \in B, c \in C \}$ Basis von $V \otimes_K L$ über K .

$$\forall w \in V_L: \exists! \alpha_{bc} \in K, \text{ fast alle } 0, \text{ so dass } w = \sum_{b,c} \alpha_{bc} \cdot b \otimes c = \sum_{b,c} \alpha_{bc} \cdot c \cdot (b \otimes 1) = \sum_{b,c} \left(\sum_{c \in B} \alpha_{bc} \cdot c \right) \cdot (b \otimes 1) = \sum_{b \in B} \beta_b \cdot (b \otimes 1)$$

$\beta_b \in L$
ged

Beispiel: Für jedes $n \geq 0$ existiert ein natürlicher Isomorphismus von L -Vektorräumen

$$f: K^n \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L^n \text{ mit } v \otimes x \mapsto xv.$$



$\forall x, y \in \mathbb{R}: \forall v \in V:$
 $x \cdot f(v \otimes y) = x \cdot (yv) = xv \cdot y$
 $= f(x \cdot (v \otimes y)) = f(x \cdot (v \otimes y))$
 $\Rightarrow f$ verhält sich wie Multiplikation mit x
 $\Rightarrow L$ -linear.

e_1, \dots, e_n Standardbasis in K^n über K
 $\Rightarrow e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1$ Basis in $K^n \otimes_K L$ über L
 $\downarrow \text{Uk}$
 e_1, \dots, e_n Basis in L^n über L .

ged.

Definition: Im Fall $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ heisst $V_{\mathbb{C}}$ die **Komplexifizierung** des reellen Vektorraums V .

Definition: Der **komplex Konjugierte** eines \mathbb{C} -Vektorraums $(W, +, \cdot, 0_W)$ ist der \mathbb{C} -Vektorraum $(W, +, \bar{\cdot}, 0_W)$, bei dem die skalare Multiplikation \cdot ersetzt wurde durch

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \times W \rightarrow W, (z, w) \mapsto z \bar{\cdot} w := \bar{z} \cdot w.$$

So wie wir üblicherweise $(W, +, \cdot, 0_W)$ mit W abkürzen, schreiben wir für $(W, +, \bar{\cdot}, 0_W)$ nur kurz \bar{W} .

Beispiel: Für jeden \mathbb{C} -Unterraum $W \subset \mathbb{C}^n$ existiert ein natürlicher Isomorphismus von \mathbb{C} -Vektorräumen

$$f: \bar{W} \xrightarrow{\sim} \{\bar{w} \mid w \in W\} \subset \mathbb{C}^n, w \mapsto \bar{w}.$$

$$f(z \bar{\cdot} w) = f(\bar{z} \cdot w) = \overline{\bar{z} w} = z \cdot \bar{w} = z \cdot f(w) \Rightarrow \mathbb{C}\text{-linear}.$$

Bsp.: $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$
 $\bar{W} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle$

Bemerkung: Für jeden \mathbb{C} -Vektorraum W gilt $\overline{\bar{W}} = W$.

Bemerkung: Jede Basis von W ist auch eine Basis von \bar{W} .

← Komponenten wie komplexe Konjugierte.